**UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR**
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y
TECNOLOGÍA DE LA INFROMACIÓN
ESTRUCTURAS DISCRETAS I

# TEORÍA DE CONJUNTOS

## Introducción

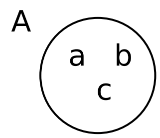
Intuitivamente, un *conjunto* es una lista o colección bien definida de objetos, que designaremos con letras mayúsculas A, B, X, Y,... Los elementos que componen el conjunto se llaman sus *elementos* o *miembros* y los designaremos por letras minúsculas (a menos que dichos elementos sean, a su vez, conjuntos).

La proposición “$a \in A$” se lee “a pertenece a A”, o bien, “el elemento a pertenece al conjunto A”. Su negación es “$a \notin A$”.

Si el conjunto A está formado por los elementos a, b y c, escribiremos:

$$A = \{a,b,c\}$$

y su *diagrama de Venn* correspondiente será




## Determinación de conjuntos

- ***Por extensión:*** cuando se nombran o enumeran todos los elementos que constituyen al conjunto. Ejem:

  $A = \{1,3,7,10\}$ $B = \{a,e,i,o,u\}$ $C = \{\text{Venezuela, Brasil}\}$

- ***Por comprensión:*** cuando se da la propiedad que caracteriza los elementos del conjunto. Ejem:

$$A = \{x \in \mathbf{R} \ / \ x \text{ es solución de } x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbf{N} \ / \ x \leq 5\} \qquad C = \{x \in \mathbf{N} \ / \ x \text{ es par}\}$$

## Conjuntos Especiales

- ***Conjuntos Numéricos:***

  **N** = {0,1,2,3,...} Conjunto de los números naturales
  **Z** Conjunto de los números enteros
  **Q** Conjunto de los números racionales
  **I** Conjunto de los números irracionales
  **R** Conjunto de los números reales
  **C** Conjunto de los números complejos
  $\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{I}^+$, $\mathbf{R}^+$ Conjunto de los números (enteros, racionales, irracionales, reales) positivos.
  $\mathbf{Z}^-$, $\mathbf{Q}^-$, $\mathbf{I}^-$, $\mathbf{R}^-$ Conjunto de los números (enteros, racionales, irracionales, reales) negativos.
  $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z}^*$, $\mathbf{Q}^*$, $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{C}^*$ Conjunto de los números (naturales, enteros, racionales, reales, complejos) sin el cero.

- ***Conjunto Universal:*** Depende de lo que se estudie en el momento, es fijado de antemano y está formado por todos los elementos que intervienen en el tema de interés. Se denotará como **U**.

- ***Conjunto Vacío****:* Es aquel que carece de elementos. Se denotará por $\varnothing$.

- ***Conjunto Unitario**:* Formado por un único elemento. Ejem: A = {5}
- ***Conjuntos Finitos y Conjuntos Infinitos:*** Intuitivamente, un conjunto finito consta de un cierto número de elementos, es decir, que el conteo de elementos puede "acabar", de lo contrario, el conjunto será infinito.

**Cardinal de un conjunto finito**

Es el número de elementos que posee el conjunto. Si A es un conjunto finito con n elementos, escribiremos card(A) = $|A|$ = n.

**Inclusión de Conjuntos**

Sean A y B dos conjuntos. Si todo elemento de A pertenece a B diremos que A está *incluido* en B o que A es un *subconjunto* de B y escribiremos $A\subseteq B$. Simbólicamente, tendremos que:

$$A\subseteq B \Leftrightarrow (\forall x : x\in A \Rightarrow x\in B)$$

**Igualdad de Conjuntos**

Dos conjuntos A y B son *iguales* si contienen los mismos elementos y escribiremos A=B. Simbólicamente, tendremos que:

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x : x\in A \Leftrightarrow x\in B)$$
$$\Leftrightarrow A\subseteq B \ \wedge\ B\subseteq A$$

**Inclusión propia**

A es un *subconjunto propio* de B si y sólo si $A\subseteq B$ y $A\neq B$. En este caso, escribiremos $A\subset B$.

**Propiedades de la Inclusión**

1. Para todo conjunto A se cumple que $A\subseteq A$. *(Reflexividad)*
2. Si $A\subseteq B$ y $B\subseteq A$, entonces A=B. *(Antisimetría)*
3. Si $A\subseteq B$ y $B\subseteq C$ entonces $A\subseteq C$. *(Transitividad)*
4. $\varnothing\subseteq A$, para todo conjunto A.

**Operaciones con Conjuntos**

- **Unión:** La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B. Simbólicamente:

$$A\cup B = \{x\in \mathbf{U} \ / \ x\in A \vee x\in B\}$$
$$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B$$

- **Intersección:** La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B. Simbólicamente:

$$A\cap B = \{x\in \mathbf{U} \ / \ x\in A \wedge x\in B\}$$
$$x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B$$

- **Diferencia:** La diferencia de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A pero que no pertenecen a B. Simbólicamente:

$$A-B = \{x\in \mathbf{U} \ / \ x\in A \wedge x\notin B\}$$
$$x\in A-B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B$$

- **Diferencia Simétrica:** La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B es la unión de los conjuntos A–B y B–A. Simbólicamente:

$$A\Delta B = (A-B)\cup(B-A)$$

**Complemento de un Conjunto**

Sea $A \subseteq \mathbf{U}$, el complemento de A, que denotaremos por $A^C$, es el conjunto formado por los elementos de **U** que no pertenecen a A.

**Propiedades de las Operaciones con Conjuntos**

1. $(A^C)^C = A$
2. $A \subseteq B \Leftrightarrow B^C \subseteq A^C$
3. $A \cap A = A$ ; $A \cup A = A$
4. $A \cup B = B \cup A$ ; $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
7. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ ; $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
8. $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
9. $A \cap \emptyset = \emptyset$ ; $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$
10. $A \cap \mathbf{U} = A$ ; $A \cup \emptyset = A$
11. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$ ; $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$
12. $A \cup A^C = \mathbf{U}$ ; $A \cap A^C = \emptyset$
13. $A \cup (A \cap B) = A$ ; $A \cap (A \cup B) = A$
14. $A - B = A \cap B^C$
15. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
16. $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
17. $A \Delta B = B \Delta A$
18. $A \Delta \emptyset = A$ ; $A \Delta \mathbf{U} = A^C$
19. $A \Delta A = \emptyset$
20. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
21. $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$
22. $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$

**Principio de Dualidad**

Sea “s” una *proposición general* que trata de la igualdad de dos expresiones con conjuntos. Cada una de estas expresiones puede contener una o más ocurrencias de conjuntos (como A, $A^C$, B, $B^C$, etc.), una o más ocurrencias de $\emptyset$ y **U** y solamente los símbolos de las operaciones con conjuntos $\cup$ y $\cap$. El *dual* de “s”, que denotaremos por “$s^d$”, se obtiene de s al reemplazar (1) cada ocurrencia de $\emptyset$ y **U** (en s) por **U** y $\emptyset$, respectivamente, y (2) cada ocurrencia de $\cup$ y $\cap$ (en s) por $\cap$ y $\cup$, respectivamente.

El *principio de dualidad* para conjuntos establece que si “s” es un teorema relativo a la igualdad de dos expresiones con conjuntos, entonces “$s^d$”, el dual de s, es también un teorema.

*(Nota: Si un teorema relativo a conjuntos contiene ocurrencias del tipo “$A \subset B$” o “$A \subseteq B$”, en el “dual” del teorema se deben reemplazar por “$B \subset A$” o “$B \subseteq A$”, respectivamente)*

**Conjuntos Disjuntos**

Diremos que dos conjuntos A y B son *disjuntos* si $A \cap B = \emptyset$.

**Familia de Conjuntos**

Es un término que se emplea en lugar de decir “conjunto de conjuntos”.

## Conjunto Potencia o Conjunto de Partes de un Conjunto

Sea $A \subseteq \mathbf{U}$, el conjunto potencia de A, que denotaremos por $P(A)$ (o $2^A$), es la familia de todos los subconjuntos del conjunto A.

## Operaciones Generalizadas

Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ una familia finita de conjuntos, en este caso podemos formar la unión e intersección de dicha familia, es decir

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Si consideramos $I = \{1,2,3,\ldots,n\}$ entonces escribimos

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i$$

Si el conjunto de índices $I = \mathbf{N}$, entonces la familia $\{A_1, A_2, \ldots\}$ se llama *sucesión de conjuntos* y escribiremos

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

También puede abreviarse la notación de la familia de conjuntos

$$\{A_1, A_2, \ldots\} = \{A_i\}_{i\in I}$$

*Definición:* Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos. La unión de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ es el conjunto $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \,/\, x \in A_i$, para algún $i \in I\}$. La intersección de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ es el conjunto $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \,/\, x \in A_i$, para todo $i \in I\}$.

## Propiedades

*1.* $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^C = \bigcap_{i\in I} A_i^C$

*2.* $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^C = \bigcup_{i\in I} A_i^C$

*3.* $B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = {}_{i\in I}\left(B \cap A_i\right)$

## Partición de un Conjunto

Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de subconjuntos de un conjunto A. Diremos que $\mathcal{A}$ es una *partición* de A si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

(a) $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ donde $A_i \neq \varnothing$, para todo $i \in I$.

(b) $A_i \cap A_j = \varnothing$, para todo $i,j \in I$ con $i \neq j$.